

Uitgewerkte voorbeelden

Voorbeeld 1

Een moeilijke, maar niet extreem moeilijke sudoku, met 28 gegevens cijfers.

	5		1		9		6	
				4				
7			8		5			4
5	3						1	8
		2				6		
8	6						3	2
1			9		3			6
				2				
	9		6		7		5	

Stap 1

We gaan eerst na welke cijfers we nog meer kunnen invullen, zonder al te veel ingewikkeldheden te plegen. Hoewel we in de meeste gevallen dan direct enige extra cijfers vinden, is dat hier niet het geval. Stap 1 levert dus bij deze sudoku niets op. Dit duidt erop dat deze sudoku minder eenvoudig is.

Stap 2

We gaan nu op zoek naar velden waar nog slechts 2 cijfers mogelijk zijn. Het resultaat is:

²⁴	5	⁴⁸	1	³⁷	9	²⁸	6	³⁷
				4	²⁶			
7	¹²		8	³⁶	5		²⁹	4
5	3						1	8
⁴⁹		2				6		
8	6				¹⁴		3	2
1			9	⁵⁸	3			6
			⁴⁵	2				
	9		6	¹⁸	7		5	¹³

De oogst is dus 15 paren.

Stap 3

We kiezen nu het paar 24 in het veld linksboven, omdat zowel kandidaat 2 als kandidaat 4 zo te zien leiden tot extra invullingen.

Uitwerking van kandidaat 2 leidt tot een tegenspraak.

Uitwerking van kandidaat 4 leidt zelfs tot een volledige invulling, dus de oplossing.

Ik neem aan dat u deze twee betrekkelijk eenvoudige uitwerkingen zelf wel kunt vinden.

Voorgaande betekent dat we hier te maken hebben met een voorbeeld waarbij stap 3 leidt tot de uitkomst 3.3.

Bij moeilijke, maar niet extreem moeilijke sudoku's is echter nog een iets andere aanpak mogelijk, die zeer verrassend is! Deze aanpak schiet in het algemeen tekort als de sudoku een stuk moeilijker is.

Voorbeeld 1, maar nu iets anders uitgewerkt

Stap 1 en 2 blijven hetzelfde.

Stap 3 wordt echter iets korter: van paar 24 in het veld linksboven worden beide kandidaten niet zo ver mogelijk uitgewerkt, maar slechts gedeeltelijk.

De gedeeltelijke uitwerking voor cijfer 2 staat linksonder in de vakjes en de uitwerking voor cijfer 4 rechtsboven.

Dit levert de volgende invulling op:

24 4	5	48 8	1	37	9	28 2	6	37
2	1	4		4	26	8		
7	12 2		8	36	5		29 9	4
	1							
5	3	7					1	8
49 9		2				6		
9	4				14		3	2
8	6	1			4			
	1						2	6
1	2		9	58	3			
			45	2				
	7		4					
2	9		6	18	7		5	13
4						2		

Als bovenstaand eindresultaat voor u nog wat te snel gaat, omdat u hiermee nog onvoldoende ervaring heeft, dan volgt hier een gedetailleerde toelichting.

Print om te beginnen de tweede fig. (de fig. die het resultaat van stap 2 is) even uit.

Ga nu eerst invullen op basis van kandidaat 2 van paar 2,4 linksboven.

Dit levert achtereenvolgens de volgende invulling op.

1^e rij: 8 op positie 7, daarna 4 op positie 3

2^e kolom: 1 op positie 3

2^e kolom: 2 op positie 7

3^e kolom: 1 op positie 6

6^e rij: 4 op positie 6

4^e kolom: 4 op positie 8

1^e kolom: 4 op positie 9

1^e kolom: 9 op positie 5

Er zijn nog wel meer cijfers in te vullen, maar dat is al niet meer nodig.

Print vervolgens opnieuw de tweede fig uit, om verwarring met de vorige invulling te voorkomen.

Ga nu invullen op basis van kandidaat 4 van paar 2,4.

Dit levert het volgende op:

1^e kolom: 9 op positie 5

1^e rij: 8 op positie 3, daarna 2 op positie 7

8^e kolom: 2 op positie 7

9^e rij: 2 op positie 9

3^e rij: 2 op positie 2

Deelvierkant linksboven: 1, 3, 6 en 9 moeten nog geplaatst worden; 3, 6 en 9 kunnen niet in het middelste veld, dus daar moet de 1 staan!

3^e kolom: 1 op positie 6

Ook hier zijn nog best meer cijfers in te vullen, maar dat is niet meer nodig.

Je kunt nu zien dat van het paar 2,4 beide kandidaten het cijfer 9 op positie 5 van de 1^e kolom, het cijfer 1 op positie 6 van de 3^e kolom en het paar 2,4 op positie 9 van de 1^e kolom opleveren. Deze drie invullingen zijn dus correct voor de betreffende velden.

We hadden nog wel even door kunnen gaan met deze paralleluitwerking, maar met de gevonden drie resultaten is de sudoku nu verder op de gewone elementaire wijze (lees: met alleen stap 1 en 2) af te maken. Dus daarom ben ik hier gestopt.

De lezer kan nu zelf de sudoku wel verder afmaken.

We hebben hier dus gezien dat van moeilijke sudoku's (die niet extreem moeilijk zijn) de oplossing al gevonden kan worden door een geschikt getallenpaar te kiezen en dan beide kandidaten een stukje uit te werken. Als dan in lege velden treffers ontstaan, dan kunnen die treffers voldoende zijn om de sudoku verder op te lossen.

I.p.v. een getallenpaar te kiezen is ook de andere optie beschikbaar: kies een rij, kolom of deelvierkant waarbij een bepaald cijfers nog slechts in 2 velden mogelijk is.

Als bovenstaande techniek lukt, dan kan de sudoku gewoon opgelost worden zonder hulpvelletjes. In dit uitgewerkte voorbeeld krijgt u misschien de indruk dat een flinke aanvullende administratie nodig is, maar niets is minder waar. Als u enige ervaring heeft opgebouwd met deze techniek, dan zult u dat ook snel merken.

Als u wilt oefenen met deze verrassende techniek, dan raad ik de site www.extremesudoku.info aan. Hier worden elke dag 5 nieuwe sudoku's geplaatst, in 5 moeilijkheidsgraden.

Als u wel eens in Duitsland komt, dan is het volgende sudokubookje een echte aanrader: Sudoku, Eberhard Krüger, Bassermann Rätsel.

200 sudoku's, in 4 moeilijkheidsgraden, waarvan de moeilijkste (die echte Herausforderung) stap 3 (de stap van paralleluitwerking) vereisen, meestal 1 keer en soms 2 keer.

Ligt in Duitsland bijna in elk boekenstalletje.

Voorbeeld 2

Een zeer moeilijke sudoku, met 25 gegeven cijfers:

3				8			6	4
	4						5	
5			7					
4	3				2	9		
		2	9					
	6			3				
							9	
			4	2			8	6
	1	6			7			3

Na uitvoering van stap 1 en stap 2 ontstaat de volgende sudoku:

3				8			6	4
6	4			¹⁹			5	
5			7	⁴⁶	⁴⁶	³	¹²	
4	3				2	9	¹⁷	
		2	9			⁶	³	
	6			3				
		⁴					9	
⁷⁹		³	4	2			8	6
	1	6	⁵⁸	⁵⁹	7		²⁴	3

We gaan nu dus beginnen met stap 3.

Voor de positie van 3 in het 8^e deelvierkant zijn 2 mogelijkheden, nl. in de 7^e rij. De rechter positie (dus in de 6^e kolom) blijkt bij uitwerking tot een tegenspraak te voeren. Dus in de linker positie (dat is in 4^e kolom) moet de 3 staan. Na invulling hiervan en daarna weer uitvoeren van stap 1 en stap 2 ontstaat nu de volgende sudoku:

3				8			6	4
6	4		12	19	3		5	
5			7	46	46	3	12	
4	3				2	9	17	
		2	9			6	3	
	6			3				
		4	3				9	
79		3	4	2			8	6
	1	6	58	59	7		24	3

We kiezen nu paar 5,9 in het 8^e veld. Hiervan blijkt 5 tot een tegenspraak te voeren. Na invulling van 9 plus uitvoering van stap 1 en stap 2 krijgen we nu de volgende sudoku:

3	27	17	5	8	9		6	4
6	4	79	2	1	3	8	5	79
5			7	46	46	3	12	
4	3		6	57	2	9	17	
1	78	2	9			6	3	
	6		1	3	58	4	27	
78		4	3	56			9	
79		3	4	2	15	17	8	6
2	1	6	8	9	7	5	4	3

Vervolgens kiezen we paar 7,9 in het 1^e veld. Hiervan blijkt de 9 tot een tegenspraak te leiden. We vullen dus de 7 in en voeren daarna weer stap 1 en stap 2 uit. Dit geeft de volgende sudoku:

3	2	1	5	8	9	7	6	4
6	4	7	2	1	3	8	5	9
5	89	89	7	4	6	3	12	12
4	3	58	6	57	2	9	17	
1	78	2	9	57	4	6	3	58
79	6	59	1	3	8	4	27	25
8	5	4	3	6	1	2	9	7
79	79	3	4	2	5	1	8	6
2	1	6	8	9	7	5	4	3

Tenslotte kiezen we paar 2,7 in het 6^e veld. De 2 blijkt al snel tot een tegenspraak te voeren. De 7 voert daarentegen snel tot een oplossing (de oplossing dus).

Samengevat ziet het oplossingspad er (met weglating van de stappen 1 en 2 die we tussentijds steeds opnieuw uitvoeren) dus zo uit:

- 3.2
- 3.2
- 3.2
- 3.3

Bovenstaande oplossingsmethode heb ik getest op de 87 sudoku's in het tijdschrift Sudoku maximal Nr. 5/2017 van Stefan Heine.

Stefan Heine is een autoriteit op het gebied van het samenstellen van zeer moeilijke sudoku's. Hij wordt regelmatig ingeschakeld bij het opstellen van sudoku's voor nationale en internationale kampioenschappen.

Voorbeeld 3

Een extreem moeilijke sudoku met 23 gegevens cijfers:

							8	
9		6		4				
			2				1	5
5					2			4
2	7		4					
		3	1	6				
				9	7			
			3				8	5
		2					3	

Na uitvoering van stap 1 en stap 2 ontstaat de volgende sudoku:

	2					469	8	69
9		6	58	4		27		
			2			469	1	5
5	6				2			4
2	7		4					
48		3	1	6				
				9	7			
			3	2		8	5	
		2				3		

Kijk nu naar de positie van 7 in de 4^e rij. De 5^e positie blijkt tot een tegenspraak te voeren. Dus op de 4^e positie kan nu 7 worden ingevuld. Na stap 1 en stap 2 krijgen we dan de volgende sudoku:

	2	57	9			4	8	6
9		6	58	4		27		
			2		6	9	1	5
5	6	89	7	38	2	1	39	4
2	7	1	4			56		
48		3	1	6				
				9	7	26		
6			3	2	14	8	5	
		2				3		

Het nu verkregen resultaat lijkt veelbelovend om door te gaan met de aanpak. Maar het blijkt niet mee te vallen om een paar te vinden dat verdere resultaten oplevert.

We gaan nu maar eens proberen van een geschikt paar beide kandidaten apart te onderzoeken. We kiezen daarvoor het paar 5,6 in het 6^e deelvierkant.

Eerst gaan we kandidaat 5 uitwerken. Dat betekent de 5 invullen en dan uiteraard stap 1 en stap 2 uitvoeren. Dit levert de volgende sudoku op:

17	2	57	9	15	3	4	8	6
9	15	6	58	4	18	27		
		48	2	7	6	9	1	5
5	6	89	7	38	2	1	39	4
2	7	1	4	38	9	<u>5</u>	6	38
48		3	1	6	5	27		
			58	9	7	6	24	
6			3	2	14	8	5	
		2	6	15		3		

Kies nu paar 1,7 in het 1^e deelvierkant. Zowel 1 als 7 voeren beide vrij snel tot een tegenspraak. Dus de conclusie moet zijn dat de onderzochte kandidaat 5 onjuist is. Dus paar 5,6 in het 6^e deelvierkant kan vervangen worden door 6. Met stap 1 en stap 2 geeft dit dan de volgende sudoku:

	2	57	9			4	8	6
9		6	58	4		7	2	3
			2		6	9	1	5
5	6	89	7	38	2	1	39	4
2	7	1	4	35		<u>6</u>	39	8
48		3	1	6	89	5	7	2
				9	7	2	46	1
6			3	2	14	8	5	79
		2				3	46	79

Kies nu paar 8,9 in het 4^e deelvierkant. De 8 voert tot een tegenspraak, dus de 9 is juist. Met stap 1 en stap 2 krijgen we dan:

	2	⁵⁷	9			4	8	6
9		6	⁵⁸	4		7	2	3
			2	³⁷	6	9	1	5
5	6	9	7	8	2	1	3	4
2	7	1	4	³⁵	³⁵	6	9	8
⁴⁸	⁴⁸	3	1	6	9	5	7	2
				9	7	2	⁴⁶	1
6		⁴⁷	3	2	¹⁴	8	5	⁷⁹
		2		¹⁵		3	⁴⁶	⁷⁹

Tenslotte kiezen we paar 1,4 in het 8^e deelvierkant. 4 leidt tot een tegenspraak en 1 geeft een oplossing, dus de oplossing.

De zojuist geschetste oplossingstechniek heb ik getest op het tijdschrift SUDOKU extrem bis hardcore Nr. 6 van de auteur Stefan Heine. De daarin staande 100 sudoku's worden door hem aangeduid als 100 zeldzame parels, verdeeld in 3 categorieën. In zijn woorden: *Stufe 10 ist gerade noch auf logischem Wege lösbar. Bei Stufe 11 bedarf es kompliziertester Methoden. Bei der unfassbar schweren Stufe 12 scheitern selbst die modernsten Löseprogramme daran einen logischen Weg zu finden.*

Wat bleek?

Alle 100 sudoku's kon ik oplossen met mijn techniek, waarbij stap 4 (de opsplitsing in meerdere sudoku's) nodig was bij ruim de helft van de sudoku's in Stufe 12. Opsplitsing in 2 sudoku's bleek hier al voldoende te zijn.

Een Nederlands tijdschrift met extreem moeilijke sudoku's is Sudoku 12–13* cum laude (van Denksport). Deze sudoku's zijn van vergelijkbare moeilijkheidsgraad als de sudoku's in het tijdschrift SUDOKU extrem bis hardcore van Stefan Heine.

Slotopmerking

Het is zeker niet zo dat de in dit artikel geschetste aanpak van moeilijke – zeer moeilijke – extreem moeilijke sudoku's tot een eenduidig bepaald oplossingspad leidt. Meerdere oplossingspaden zijn mogelijk, afhankelijk van de getallenparen (of paren van 2 mogelijkheden) die men steeds kiest.

Hieronder nog een voorbeeld van een extreem moeilijke sudoku.

Gevonden op www.kennislink.nl. Zie Marc Seijlhouwer, 21 oktober 2012.

Deze heb ik, zij het met de nodige inspanning, kunnen oplossen met mijn oplossingsmethode voor extreem moeilijke sudoku's.

		5	3					
8							2	
	7			1		5		
4					5	3		
	1			7				6
		3	2				8	
	6		5					9
		4					3	
					9	7		